

Calcul infinitésimal et conceptualisation du mouvement (17^e et 18^e siècles)

par

Michel BLAY

En 1687, Isaac Newton (1642-1727) publie à Londres son célèbre ouvrage, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* ; quelques années auparavant, en 1673, Christiaan Huygens (1629-1695) avait publié à Paris son *Horologium oscillatorium*. Ces deux ouvrages marquent, à n'en pas douter, la naissance de ce qu'il est convenu d'appeler la mécanique rationnelle.

Cependant, tout en constituant, par rapport aux travaux galiléens exposés dans les *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (Leyde, 1638), un développement considérable de la science du mouvement, ces deux textes exceptionnels, mais dont l'organisation mathématique repose pour l'essentiel sur des procédures de géométrie infinitésimale, sont encore loin des grands traités de la deuxième moitié du XVIII^e siècle, que ce soient ceux de d'Alembert (1717-1783) et de Lagrange (1736-1813) ou ceux de Laplace (1749-1827), dans lesquels s'affirme avec force la primauté des procédures analytiques.

En effet, la publication par G.W. Leibniz (1646-1716), en 1684, dans le tout nouveau périodique, les *Acta Eruditorum*, de son article fondateur du nouveau calcul différentiel sous le titre "Nova methodus pro maximis et minimis [...]" prolongé en 1686 dans la même revue par un second intitulé "De geometria recondita et analysi indivisibilium infinitorum", a profondément transformé le champ conceptuel des mathématiques, en entraînant dans les décennies qui suivent pour la science du mouvement une transformation du même ordre. On assiste en effet au tournant des XVII^e et XVIII^e siècles à une véritable explosion du champ de la science du mouvement, explosion qui ouvre la voie aux réussites de la mécanique rationnelle du XVIII^e siècle.

Cette nouveauté, cette facilité avec laquelle des questions extrêmement difficiles sont maintenant traitées est soulignée avec netteté par Pierre Varignon (1654-1722) à l'occasion de la rédaction de divers mémoires rédigés autour des années 1700 et publiés dans les volumes des *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*. On y lit en particulier : "[...] il en résulte aussi une formule très simple des forces centrales, tant centrifuges que centripètes, lesquelles sont le principal fondement de l'excellent ouvrage de M. Newton *De phil. Natur. Princ. Math.* [...] me contentant de faire voir ici

avec quelle facilité elle expédie les exemples que voici, dont la plupart sont de M. Newton savoir ceux des prop. 7, 8, 9, 10 de son premier livre".

Ainsi, comme l'indique Pierre Varignon, la spécificité de sa démarche comme la nouveauté de son approche sont caractérisées à la fois par la généralité des résultats obtenus et l'aisance avec laquelle les exemples newtoniens sont simplement déduits de ces résultats comme autant de cas particuliers.

Ce qui est donc en jeu, au cours des premières années du XVIII^e siècle, c'est la mise en œuvre d'une nouvelle conceptualisation de la science du mouvement ordonnée autour des concepts du nouveau calcul différentiel et intégral de Leibniz. Comment l'introduction du formalisme différentiel a-t-elle été rendue possible et comment cette introduction va-t-elle transformer les problèmes de la science du mouvement ?

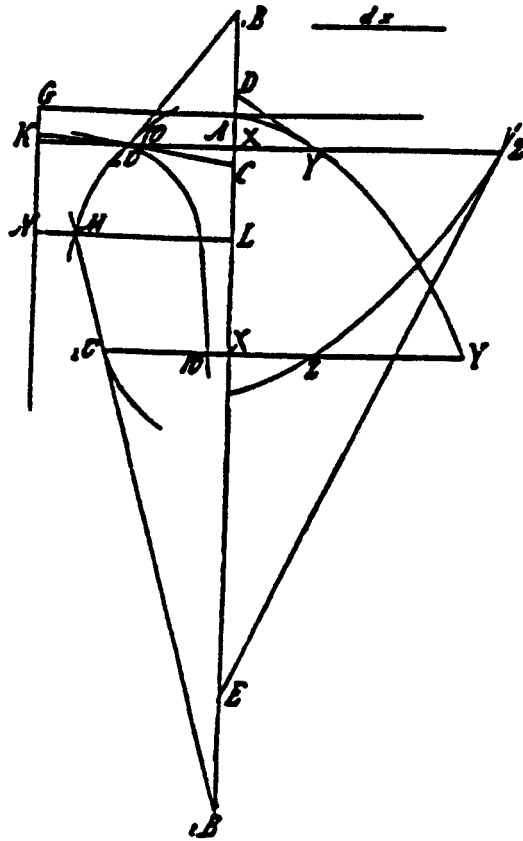
1. Le calcul leibnizien et ses premières diffusions

1.1. La *Nova Methodus*

Bien que Leibniz possède, pour l'essentiel, les éléments de son calcul depuis 1676, c'est seulement dans le numéro d'octobre 1684 de la nouvelle revue de Leipzig – Les *Acta Eruditorum* – qu'il publie le texte fondateur de son nouveau calcul, *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec tractus, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*. Cet article, comme le suggère son titre, a pour objet de présenter une "Nouvelle méthode pour chercher les maxima et les minima, ainsi que les tangentes", méthode "que n'embarrassent ni les expressions fractionnaires, ni les expressions irrationnelles", c'est-à-dire finalement une nouvelle méthode pour l'étude des courbes.

Ce très court texte de six pages est pour les contemporains d'une lecture très difficile en raison de la nouveauté mathématique qu'il recèle, mais aussi du fait d'une mauvaise typographie et de l'extrême concision du style leibnizien. Ce dernier y énonce cependant, sans les démontrer, les principales règles de son calcul.

Préalablement, dans un très bref paragraphe introductif, Leibniz a défini à partir de l'analyse des éléments géométriques d'une figure, ce qu'il appelle alors "differentia". Considérons donc avec Leibniz, "l'axe AX et différentes courbes VV , WW , YY , ZZ ", dont les "ordonnées perpendiculaires à l'axe" VX , WX , YX et ZX sont "appelées respectivement v , w , y , z ".



Le segment AX pris sur l'axe est quant à lui appelé x . Leibniz introduit ensuite les tangentes VB , WC , YD et ZE aux différentes courbes, tangentes qui coupent l'axe AX respectivement en B , C , D et E , puis finalement définit son concept de "differentia" (différence) :

"Appelons alors dx un segment de droite choisi arbitrairement et dv (dw , dy ou dz), c'est-à-dire la différence de v ("differentia") (de w , de y ou de z) un segment qui soit avec dx comme v (w , y ou z) avec XB (XC , XD ou XE)".

Cela étant, comme nous l'avons dit, Leibniz énonce sans les démontrer les premières règles de son calcul ("*His positis, calculi regulae erunt tales*") :

"Soit a une constante donnée, da sera égal à 0 et \overline{dax} sera égal à adx . Si y est égal à v (c'est-à-dire toute ordonnée de la courbe YY égale à l'ordonnée correspondante de la courbe VV), dy sera égal à dv .

Maintenant l'Addition et la Soustraction : si $z - y + w + x$ est égal à v , $\overline{dz - y + w + x}$ ou dv sera égal à $dz - dy + dw + dx$.

Multiplication : \overline{dxv} est égal à $x dv + v dx$, c'est-à-dire, en posant y égal à xv , on aura dy égal à $x dv + v dx$. Car on a tout loisir d'employer, soit l'expression xv , soit à sa place pour abrégé, une lettre, par exemple y . Remarquons que dans ce

calcul, x et dx sont traités de la même façon, de même que y et dy , ou toute autre lettre indéterminée et sa différentielle. Remarquons également que la démarche inverse, à partir de l'équation différentielle, n'est pas toujours possible, si ce n'est avec une certaine précaution dont nous parlerons ailleurs.

Ensuite, la *Division* : $d \frac{v}{y}$ ou (en posant z égal à $\frac{v}{y}$) dz est égal à $\frac{\pm v dy \mp y dv}{yy}$

Puis, après avoir donné un certain nombre de précisions relatives à la manipulation des signes, suivant que les ordonnées croissent ou décroissent, Leibniz en vient à l'étude du comportement local des courbes.

Cette question, impliquant la définition de la convexité, de la concavité et des points d'inflexion, le conduit, bien évidemment, à introduire des différentielles du second ordre qu'il appelle "*differentiae differentiarum*" :

"[...] si, lorsque les ordonnées v croissent, il en va de même de leurs incréments ou différences dv (c'est-à-dire qu'en prenant les dv positifs, les ddv , différences des différences, sont également positifs, ou également négatifs en les prenant négatifs) la courbe tourne sa *convexité* vers l'axe, dans le cas contraire sa *concavité*. Mais là, où l'incrément est maximum ou minimum, c'est-à-dire lorsque les incréments de décroissants qu'ils étaient deviennent croissants, ou le contraire, il y a un *point d'inflexion* ("*punctum flexus contrarii*") ; la concavité et la convexité s'échangent, à condition toutefois qu'en ce point les ordonnées ne deviennent pas de croissantes, décroissantes ou l'inverse, car alors la concavité ou la convexité ne changeraient pas ; mais, il est exclu que les incréments continuent d'augmenter ou de diminuer, lorsque les ordonnées de croissantes deviendraient décroissantes, ou le contraire. C'est pourquoi il y a un point d'inflexion quand ni v ni dv ne sont égaux à 0 et que cela cependant est le cas pour ddv ".

Après quelques nouvelles remarques sur l'usage des signes, Leibniz introduit deux nouvelles règles, l'une relative aux puissances et l'autre aux racines :

"*Puissances* : $dx^a = a.x^{a-1}dx$, par exemple $dx^3 = 3x^2dx$; $d \frac{1}{x^a} = -\frac{adx}{x^{a+1}}$, par exemple

si $w = \frac{1}{x^3}$, nous aurons $dw = -\frac{3dx}{x^4}$.

Racines : $d \sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b} dx \sqrt[b]{x^{a-b}}$ d'où $d \sqrt[2]{y} = \frac{dy}{2 \sqrt[2]{y}}$, puisqu'en effet, dans ce cas, a vaut 1, b vaut 2 ; donc $\frac{a}{b} \sqrt[b]{x^{a-b}}$ est $\frac{1}{2} \sqrt[2]{y^{-1}}$; or y^{-1} est la même chose que $\frac{1}{y}$,

d'après la nature des exposants d'une progression géométrique, et $\sqrt[2]{\frac{1}{y}}$ est $\frac{1}{\sqrt{y}}$, $d\frac{1}{\sqrt[2]{y}} = \frac{-adx}{\sqrt[2]{y}}$ [...]".

Leibniz souligne ensuite la très grande généralité de son nouvel algorithme et finalement sa supériorité par rapport aux autres méthodes alors en usage, que ce soient celles de Jean Hudde, de Pierre Fermat, de James Gregory, d'Isaac Barrow ou bien encore de John Wallis : "Lorsqu'on connaît l'*algorithme*, si je peux dire, de ce calcul que j'appelle *différentiel*, on peut trouver par le calcul ordinaire toutes les autres équations différentielles, les maxima et minima ainsi que les tangentes sans avoir à éliminer les fractions, les irrationnels, ou d'autres particularités, ce qui, pourtant, devait être fait avec les méthodes présentées jusqu'à ce jour".

Puis Leibniz, après avoir donné en quelques lignes une nouvelles présentation de son concept de "differentia" en relation avec les grandeurs infinitésimales, indique suivant quelles procédures et manipulations il est possible de déduire d'une équation donnée l'équation différentielle : "Il en résulte qu'on peut écrire l'équation différentielle de toute équation donnée, en remplaçant simplement chaque *membre* (c'est-à-dire chaque partie qui pour former l'équation est seulement ajoutée ou retranchée) par sa quantité différentielle. Pour chacune des autres quantités (qui ne sont pas elles-mêmes des membres mais qui contribuent à former l'un d'entre eux), on fait intervenir sa quantité différentielle pour obtenir la quantité différentielle du membre lui-même, non pas par une simple substitution, mais en suivant l'algorithme que j'ai donné ci-dessus". La dernière partie du Mémoire est consacrée à l'étude de quelques exemples. L'un d'eux, tiré de l'optique, a d'ailleurs pu, quelques années plus tard, influencer Jean Bernoulli dans ses recherches sur la courbe brachystochrone.

Deux ans après la publication de ce premier Mémoire consacré au nouveau calcul différentiel, Leibniz donne, en juin 1686, toujours dans les *Acta Eruditorum*, un second Mémoire intitulé *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum*. Cet écrit, dont la rédaction a été suscitée en partie par la lecture d'un livre de John Craig consacré aux quadratures, dans lequel celui-ci fait usage de la notation différentielle proposée par Leibniz en 1684, traite principalement, à la lumière des nouvelles méthodes, du problème inverse des tangentes et du calcul des quadratures. Leibniz introduit à cet effet, pour la première fois, le signe \int et définit, l'une par rapport à l'autre, les deux opérations de "sommation" et de différentiation. Cependant, le mot "intégral" n'a été utilisé pour la première fois, dans un texte imprimé, qu'en mai 1690 par Jacques Bernoulli.

1.2. La diffusion du nouveau calcul

Nouveauté de la méthode, mémoires difficiles à lire, le travail leibnizien va connaître, autour des années 1690, une diffusion assez lente. Le premier à reprendre et à utiliser les écrits leibniziens est le mathématicien bâlois Jacques Bernoulli qui publie en mai 1690 dans les *Acta Eruditorum* un article utilisant le nouveau calcul. Cet article est consacré à la résolution du problème de la courbe isochrone, posé par Leibniz, dans les *Nouvelles de la République des Lettres*, en septembre 1687, au plus fort de sa querelle avec les cartésiens sur la "mesure des forces". Le problème de la courbe isochrone a pour objet de trouver la courbe "dans laquelle un corps pesant descend uniformément et approche également de l'horizon en temps égaux". C'est là un problème plus difficile que ceux qu'on pose habituellement à l'époque car il ne s'agit pas dans ce cas de déterminer une tangente ou de calculer une aire comprise sous une courbe donnée, mais bien plutôt de trouver cette courbe elle-même. Il ne s'agit donc plus d'un problème équivalent, en termes modernes, à la différentiation ou à l'intégration, mais à l'étude d'une équation différentielle.

C'est vers la même époque que Jean Bernoulli, aidé par son frère Jacques, s'initie au nouveau calcul. A partir donc des années 1690, les frères Bernoulli développent d'une façon systématique les potentialités du calcul leibnizien. Et cela, principalement à l'occasion de la résolution des multiples problèmes que se soumettent, les uns aux autres, le plus souvent sous la forme d'un défi, les membres de l'Europe savante. En dehors de la courbe isochrone dont nous avons déjà parlé on peut rappeler le problème dit de la courbe isochrone paracentrique qui a pour objet de trouver la courbe plane qu'un point pesant doit décrire pour que sa distance à un point fixe varie proportionnellement au temps employé à parcourir chaque arc de la courbe ; ou bien encore le célèbre problème de la courbe brachystochrone où il s'agit de trouver la courbe plane AMB qu'un point pesant M doit parcourir pour descendre sans vitesse initiale d'un point A à un autre B dans le temps le plus bref. Cette dernière étude sert de point de départ à l'analyse des problèmes d'isopérimètres, c'est-à-dire, d'un point de vue plus général, à l'analyse de problèmes touchant aux extremums d'intégrales. La résolution de ces questions suscitera, au tournant du siècle, une vive querelle entre les frères Bernoulli. Elle aboutira entre les mains de Leonhard Euler et Lagrange au développement du calcul des variations. Dans le cadre de ces recherches il importe également de ne pas négliger la résolution du problème des trajectoires orthogonales et la détermination des géodésiques de certaines surfaces.

Nous avons abandonné la diffusion du calcul en 1690 entre les mains des frères Bernoulli. C'est lors d'un séjour effectué à Paris pendant l'hiver 1691-1692 que Jean Bernoulli, sur le modèle du "cours particulier rémunéré", initie le marquis Guillaume

de l'Hospital (1661-1704) aux arcanes du nouveau calcul. Ce sont ces cours qui constitueront la charpente mais aussi, pour une large part, la chair du premier traité ou "manuel" de calcul différentiel ; le calcul intégral en est absent. L'ouvrage est publié à Paris en 1696 par le marquis de l'Hospital sous le titre *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Dans cet ouvrage, comme cela était déjà le cas dans le Mémoire de Leibniz de 1684, le calcul est présenté comme une nouvelle méthode pour résoudre des problèmes géométriques particuliers (minima, maxima, tangentes, rayons de courbure, etc...). L'utilisation de ces nouvelles procédures en physique et plus particulièrement dans la science du mouvement n'est pas immédiate et requiert un important travail conceptuel.

A la suite des "cours particuliers" de Jean Bernoulli, le milieu mathématique français, représenté ici par un groupe de savants proches de Nicolas Malebranche (1638-1715) et préoccupé depuis plusieurs années par une réforme des mathématiques cartésiennes, assimile rapidement le nouveau calcul leibnizien. Ce groupe devient alors l'introducteur du calcul différentiel en France et, en particulier, son introducteur à l'Académie Royale des Sciences qui venait d'être créée quelques années auparavant, en 1666. On peut dire que cette introduction commence lorsque le 17 juin 1693 le marquis de l'Hospital est reçu à l'Académie. Dans les semaines qui suivent, le marquis présente divers mémoires qui utilisent abondamment les nouvelles méthodes du calcul leibnizien. Ainsi, après un bref mémoire en juin 1693 il dépose en août 1693 un mémoire intitulé "Méthode facile pour déterminer les points des caustiques par réfraction, avec une manière nouvelle de trouver les développées". Ces questions abordées précédemment par Christiaan Huygens dans son *Horologium oscillatorium* de 1673 trouvent là des solutions rapides, élégantes et générales. Le marquis revient sur ces mêmes sujets en juin 1694 à l'occasion de la présentation d'un mémoire intitulé "Nouvelles remarques sur les développées, sur les points d'inflexion, et sur les plus grandes et les plus petites quantités". Ces travaux du marquis de l'Hospital sont prolongés par ceux de Pierre Varignon qui, le 18 juin 1695, lit à l'Académie un mémoire relatif à la "rectification et quadrature de l'évolutive du cercle décrite à la manière de Monsieur Huygens" puis dans le mois suivant présente des mémoires relatifs aux cycloïdes et aux spirales, ainsi que par ceux de Joseph Sauveur à qui l'on doit en juin 1696, alors que le livre du marquis de l'Hospital est prêt à être mis en vente, une première présentation systématique à l'Académie des résultats du calcul leibnizien.

Cependant le calcul fait l'objet dans les mois qui suivent des premières critiques académiciennes comme en témoigne la lettre de Pierre Varignon à Jean Bernoulli en date du 6 août 1697 : "M. le Marquis de l'Hospital est encore à la campagne de sorte que je me trouve seul ici chargé de la défense des infiniment petits, dont je suis le vrai martyr tant j'ai déjà soutenu d'assauts pour eux contre certains mathématiciens

du vieux style, qui chagrins de voir que par ce calcul les jeunes gens les attrapent et même les passent, font tout ce qu'ils peuvent pour les décrier, sans qu'on puisse obtenir d'eux d'écrire contre ; il est pourtant vrai que depuis la solution que M. le Marquis de l'Hospital a donné de votre problème de *linea celerrimi descensus* ils ne parlent plus tant ni si haut qu'auparavant".

Parmi ces mathématiciens "vieux style" il convient de ranger, Philippe de la Hire, l'abbé Bignon, président de l'Académie, le Père Gouye et l'abbé Gallois. Ces deux derniers participeront activement au grand débat sur le calcul des infiniment petits qui s'ouvrira officiellement à l'Académie Royale des sciences le 17 juillet 1700 à l'occasion de la lecture d'un mémoire de Michel Rolle.

2. Pierre Varignon : la construction de l'algorithme de la cinématique

En dépit des vives polémiques qui agitent l'Académie Royale des Sciences Pierre Varignon (1654-1722), après avoir assimilé assez rapidement les principaux éléments du nouveau calcul, va s'attacher, dans les dernières années du XVII^e siècle et les premières du XVIII^e, à reprendre, dans le cadre des méthodes leibniziennes, l'étude du mouvement. Il construit ainsi l'algorithme de la cinématique, le premier algorithme appartenant au champ spécifique de la physique mathématique.

Le travail de Varignon s'effectue en deux temps, le premier est consacré à la construction du concept de "vitesse dans chaque instant", le deuxième à celui de "force accélératrice dans chaque instant". Ce n'est qu'à l'issue de cette double construction que Varignon, observant les formules qu'il vient de construire, en déduit ce qu'il est aujourd'hui convenu d'appeler l'algorithme de la cinématique.

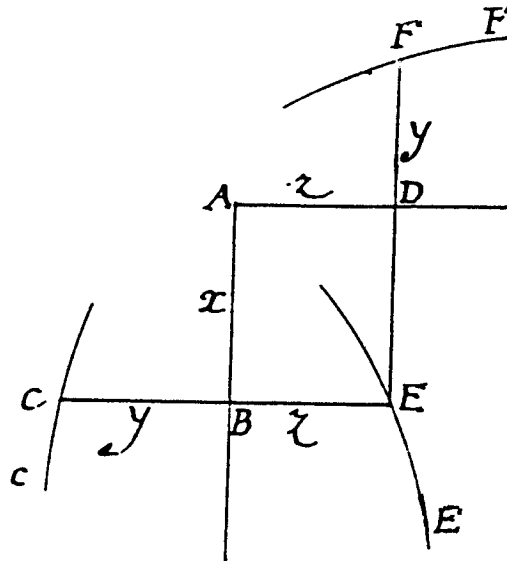
C'est dans deux Mémoires, lus aux séances de l'Académie Royale des Sciences respectivement le samedi 5 juillet et le samedi 6 septembre 1698, que Varignon va donner à la science du mouvement, par l'élaboration du concept de "vitesse dans chaque instant", un nouveau point de départ.

Le premier Mémoire en date du samedi 5 juillet 1698 a pour objet de donner une expression générale de la vitesse susceptible de permettre le traitement de tous les mouvements dans le cas de trajectoires rectilignes, quel que soit le mode de variation de la vitesse : "Règle générale pour toutes sortes de mouvements de vitesses quelconques variées à discrétion".

Dans son ensemble, la démarche de Varignon va consister à considérer comme uniforme la vitesse d'un corps pendant chaque instant de son mouvement ou, pour reprendre une expression de Fontenelle dans l'*Histoire de l'Académie Royale des Sciences* pour l'année 1700 :

"... M. Varignon n'a pas laissé de traiter les mouvemens variés comme les uniformes, & de tirer des uns les mêmes conséquences que des autres".

Dans son Mémoire, Varignon définit tout d'abord un certain nombre de variables à partir desquelles la mise en place conceptuelle peut être réalisée.



Archives de l'Académie des Sciences ; Registres manuscrits, t. 17bis, fol. 298 r°

"... (tous les angles rectilignes de la figure qu'on voit ici étant droits) soient $AC = x$ les espaces parcourus en quelque sens qu'on voudra, $BE = z$ les temps employez à les parcourir, et $BC = y = DF$ les vitesses à chaque point B de ces espaces".

Les variables, espace, temps et vitesse, étant maintenant représentées par les "axes" ou segments de droite AB , BE et BC (ou DF), il devient alors possible en associant ces variables deux à deux, d'engendrer ce qu'on pourrait appeler en termes modernes le diagramme des espaces EE , et les deux diagrammes des vitesses CC et FF :

"... de manière que la courbe EE (quelle qu'elle soit) formée par tous les points E , exprime les espaces par ses abscisses AB , et les temps employez à les parcourir, par ses ordonnées correspondantes BE ; la courbe CC (quelle qu'elle soit aussi) formée par tous les points C exprime de même les espaces par les abscisses AB , et les vitesses à chaque point B de ces espaces, par ses ordonnées correspondantes BC ; enfin la courbe FF (quelle qu'elle soit encore) exprime aussi par ses ordonnées DF ces mêmes vitesses comparées aux temps BE ou AD qui leur servent d'abscisses".

Considérons maintenant ce qui se passe dans un instant :

"Cela posé, les instans seront = dz ; l'espace parcouru dans chaque instant, sera = dx ; et la vitesse avec laquelle dx aura été parcourue sera = y ".

Ainsi, dans un instant égal à dz , l'espace parcouru par le mobile sera égal à dx , tandis que la vitesse de ce mobile sera égale à y . Varignon affirme alors que cette vitesse, dans chaque instant, peut "être regardée comme uniforme" :

"De sorte que cette vitesse (y), dans chaque instant pouvant être regardée comme uniforme, a cause que $y \pm dy = y$, la notion seule des vitesses uniformes donnera $y = \frac{dx}{dz}$ pour la regle de tous les mouvemens variés comme on voudra, c'est a dire quelque rapport d'espace, de temps, ou de vitesse, qu'on suppose ; la vitesse de chaque instant etant toujours et par tout egale au quotient de l'espace parcouru dans chaque instant divisé par cette même differentielle de temps".

Il est important de souligner comme Varignon le fera explicitement seulement dans un Mémoire en date du 6 juillet 1707 intitulé : "Des mouvemens variés de volonté, comparés entr'eux et avec les uniformes", que "l'espace et le temps etant des grandeurs heterogenes, ce n'est point proprement elles qu'on compare ensemble dans le rapport qu'on appelle vitesse, mais seulement les grandeurs homogenes qui les expriment, lesquelles sont ici, et seront toujours dans la suite ou deux lignes, ou deux nombres, ou deux telles autres grandeurs homogenes qu'on voudra".

Cela étant, il est clair que le raisonnement de Varignon, le conduisant au concept de vitesse dans chaque instant, repose directement sur les procédures du calcul des différences mises en œuvre en particulier dans *l'Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*, publié à Paris en 1696 par le Marquis de l'Hospital. Nous pouvons y lire en particulier :

"I. Demande ou Supposition

2. On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent entre elles que d'une quantité infiniment petite : ou (ce qui est la même chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même".

Ainsi Varignon est en droit de confondre $y \pm dy$ avec y . Cette vitesse y peut alors être "considérée comme demeurant la même" pendant l'intervalle de temps dt au cours duquel la longueur dx a été parcourue. Et, en conséquence "la notion seule des vitesses uniformes" donne bien, immédiatement, l'expression de la vitesse y dans

chaque instant $y = \frac{dx}{dt}$.

Sa caractérisation de la vitesse dans chaque instant permet à Varignon de donner dans son mémoire du 5 juillet 1698 une "Règle générale". Celle-ci n'est qu'une reprise de sa caractérisation, sous trois aspects différents, privilégiant successivement, à la faveur de manipulations algébriques, les vitesses, les temps et les espaces :

"Regle generale

Des vitesses		Des temps		Des espaces
$Y = \frac{dx}{dz}$	ou	$dz = \frac{dx}{y}$	ou	$dx = ydz$ "

De ces trois formules, il suit bien évidemment que :

"Quelles que soient presentement *la vitesse d'un corps* (accélérée, retardée, en un mot variée comme on voudra), *l'espace parcouru, et le temps employé a le parcourir* ; deux de ces trois choses étant données a discretion, il sera toujours facile de trouver le troisième par le moyen de cette regle, même dans les variations de vitesse les plus bizarres qui se puissent imaginer".

La construction du concept varignonien de vitesse dans chaque instant a donc finalement été rendue possible par un double travail conceptuel :

- l'un permettant, par le dépassement du débat traditionnel sur les grandeurs homogènes, d'exprimer le concept de vitesse sous la forme d'un quotient ;
- l'autre permettant, par l'introduction de l'idée suivant laquelle dans un instant de temps la vitesse peut être considérée comme constante, de faire intervenir aisément les concepts du calcul leibnizien.

Cela étant, l'énoncé varignonien de la Règle générale clôt la première partie du Mémoire du 5 juillet 1698. La deuxième partie s'attache, à travers cinq exemples, à la mise en œuvre de cette Règle générale.

Deux mois plus tard, le 6 septembre 1698, Varignon complète cette première étude par un deuxième Mémoire consacré aux mouvements suivant des trajectoires curvilignes : "Application de la Règle générale des vitesses variées, comme on voudra, aux mouvemens par toutes sortes de courbes, tant mécaniques que géométriques. D'où l'on déduit encore une nouvelle manière de démontrer les chutes isochrones dans la cycloïde renversée".

Varignon se trouve donc maintenant en possession du concept de vitesse dans chaque instant, utilisant les ressources du calcul leibnizien, et valable tant pour les

mouvements rectilignes que pour les mouvements curvilignes.

Comment les questions relatives à la science du mouvement et plus spécialement les questions soulevées par Newton dans le Livre I des *Principia* vont-elles être maintenant appréhendées par Varignon ?

Dès l'année 1700, Varignon s'efforce de donner au problème des forces centrales, dans trois Mémoires successifs, toute la clarté et la généralité que peuvent lui apporter les nouvelles méthodes du calcul leibnizien associées à ses travaux sur le concept de vitesse dans chaque instant.

Ces trois textes publiés dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences en date des 30 janvier, 31 mars et 13 novembre 1700, portent respectivement les titres :

- "Manière générale de déterminer les forces, les vitesses, les espaces, les temps, une seule de ces quatre choses étant donnée dans toutes sortes de mouvements rectilignes variés à discrétion".

- "Du mouvement en général par toutes sortes de courbes ; et des forces centrales, tant centrifuges que centripètes, nécessaires aux corps qui les décrivent".

- "Des forces centrales, ou des pesanteurs nécessaires aux planètes pour leur faire décrire les orbés qu'on leur a supposés jusqu'icy".

Comme les titres des deux premiers Mémoires le laissent entendre, nous retrouvons ici l'ordre conceptuel des deux Mémoires de 1698 introduisant en particulier le concept de vitesse dans chaque instant : le premier va traiter des "forces centrales" ou de ce qu'un corps a "de force vers (un centre) C" ou bien encore de la "tendance au point C comme centre" dans le cas des corps décrivant des trajectoires rectilignes. Le second va s'attacher au cas des "forces centrales" dans le cas où les corps décrivent des trajectoires curvilignes autour d'un centre fixe donné.

Dans le troisième Mémoire, Varignon abandonne les exemples d'ordre plus strictement mathématique au profit de l'étude des orbés des planètes.

*

* *

Le premier Mémoire en date du 30 janvier 1700 s'inscrit directement dans le prolongement de celui en date du 5 juillet 1698 sur le mouvement rectiligne. Varignon indique d'ailleurs dans un premier paragraphe absent de la version définitive publiée dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, mais que l'on peut lire dans les Registres manuscrits des Procès-verbaux des séances de l'Académie Royale des Sciences :

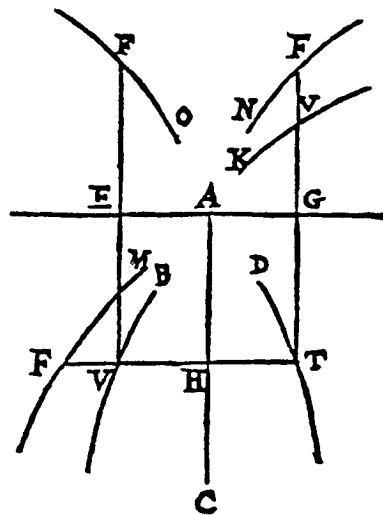
"Le cinq juillet de 1698 je demontray a l'Academie une Regle generale pour

toutes sortes de mouvemens varies a discretion, et telle qu'en prenant sur la figure presente (dont tous les angles rectilignes sont droits) AH pour tout l'espace parcouru, les ordonnées VH = VG d'une courbe quelconque, VB ou VK pour les vitesses à chaque point H de cet espace, et les ordonnées HT d'une autre courbe aussi quelconque TD pour les temps employés a venir de A en H ; une de ces trois courbes etant donnée, l'on en deduira toujours les deux autres".

Varignon précise alors, dans ce même texte inédit, que sa perspective, dans ce nouveau Mémoire, s'enrichit : il va maintenant poser la question de l'intensité de la force centrale associée à la variation des mouvements :

"Mais comme en cela je ne comprenois point alors la force vers C qua le corps en chaque point H, indépendamment de sa vitesse et que j'appelleray dorenavant force centrale a cause de sa tendance au point C comme centre".

Pour résoudre ce problème, Varignon se donne les différentes variables nécessaires et matérialise leurs rapports à l'aide d'un graphique dont la construction, dans son principe, est identique à celle présentée dans le Mémoire du 5 juillet 1698. Dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, cette nouvelle étude de Varignon s'ouvre donc en ces termes :



"Tous les angles rectilignes étant droits dans la figure que voicy, soient six courbes quelconques TD, VB, FM, VK, FN, FO, dont les trois premières expriment par leur abscisse commune AH, l'espace parcouru par un corps quelconque mû comme l'on voudra le long de AC. Soit de même le temps employé à le parcourir, exprimé par l'ordonné correspondante HT de la courbe TD ; la vitesse de ce corps en chaque point H, par les ordonnées aussi correspondantes VH, VG, des courbes VB, VK ; ce qu'il a de force vers C, à

chaque point H, indépendamment de sa vitesse (je l'appelleray dorénavant Force centrale à cause de sa tendance au point C comme centre), s'exprimera de même par des ordonnées correspondantes encore FH, FG, FE, des courbes FM, FN, FO".

Dans la suite de son texte, Varignon nomme ces six courbes fondamentales TD, VB, FM, VK, FN et FO respectivement (nous rappelons que le corps décrit d'un mouvement rectiligne quelconque AC) :

"... la courbe TD, à laquelle les ordonnées HT se terminent en T, s'appellera la courbe des temps". (Les abscisses sont AH).

"Les deux courbes VB, VK, auxquelles les ordonnées correspondantes et égales VH, VG, se terminent en V, s'appelleront les courbes des vitesses". (Les abscisses sont respectivement AH et AG ou HT).

Les courbes VB et VK correspondent à ce que nous avons appelé dans notre présentation du Mémoire du 5 juillet 1698 les premier et deuxième diagrammes des vitesses.

"Enfin les trois courbes FM, FN, FO, auxquelles les ordonnées correspondantes encore et égales FH, FG, FE se terminent en F, s'appelleront les courbes des forces". (Les abscisses sont respectivement AH, HT ou AG, et VH ou EA).

En résumé, nous pouvons dire, dans un langage légèrement modernisé, que la courbe TD exprime les variations de l'espace AH en fonction du temps HT ; la courbe VB celles de l'espace AH en fonction de la vitesse VH ; la courbe VK celles du temps AG en fonction de la vitesse VG ; la courbe FM celles de l'espace AH en fonction de la force centrale FH ; la courbe FN celles du temps AG en fonction de la force centrale FG ; et enfin, la courbe FO celles de la vitesse EA en fonction de la force centrale FE.

Varignon associe alors à chacune des quatre variables, espace, temps, vitesse et force, un symbole algébrique déterminé :

"... soient les espaces parcourus $AH = x$, les temps employés à les parcourir $HT = AG = t$, les vitesses en H (que j'appelleray finales) $HV = AE = GV = v$, les forces centrales correspondantes $HF = EF = GF = y$ ".

A l'issue de cette procédure d'algébrisation, Varignon est en mesure de mettre en place, dans un premier temps, les concepts cinématiques, déjà envisagés dans le Mémoire du 5 juillet 1698 et nécessaires pour la suite de son investigation des forces centrales dans le cas des mouvements rectilignes :

"De là on aura dx pour l'espace parcouru comme d'une vitesse uniforme v , à chaque instant ; dv pour l'accroissement de vitesse qui s'y fait ; ddx pour ce qui se parcourt d'espace en vertu de cet accroissement de vitesse ; et dt pour cet instant.

A ce compte, la vitesse ne consistant que dans un rapport d'espace parcouru d'un mouvement uniforme, au temps employé à le parcourir, l'on aura déjà $v = \frac{dx}{dt}$ pour une première Règle, laquelle donnera $dv = \frac{ddx}{ct}$ en faisant dt constante".

Varignon se trouve donc maintenant en possession de deux expressions différentielles relatives au concept de vitesse :

- D'une part, celle de la vitesse dans chaque instant : $v = \frac{dx}{dt}$.

- D'autre part, celle de l'accroissement de cette même vitesse pendant le même instant dt : $dv = \frac{ddx}{dt}$.

De même, le mouvement varié peut être interprété comme la résultante à chaque instant d'un mouvement uniforme de vitesse v , égale à la vitesse totale acquise lors de l'intervalle de temps précédent, et d'un mouvement également uniforme de vitesse dv , vitesse acquise dès le début de l'intervalle de temps dt . Cette deuxième vitesse peut être négligée par rapport à la première à l'intérieur de l'intervalle de temps dt .

La mise en place des expressions différentielles relatives à la force centrale va pour sa part s'appuyer sur le modèle galiléen de la chute des corps :

"De plus les espaces parcourus par un corps mû d'une force constante et continuellement appliquée, telle qu'on conçoit d'ordinaire la pesanteur, étant en raison composée de cette force et des quarrés des temps employés à les parcourir ; l'on aura aussi $ddx = ydt$ ou $y = \frac{ddx}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$. Ce qui fait encore une

Règle $y = \frac{dv}{dt}$, qui avec la précédente $v = \frac{dx}{dt}$, satisfait à tout ce qu'on se propose icy de résoudre".

Varignon adopte ici la conceptualisation de la force accélératrice proposée par Newton dans le Lemme X de la Section I du Livre I des *Principia*. La comparaison de la première phrase du texte varignonien avec l'énoncé du Lemme X de Newton est dans cette perspective tout à fait révélatrice (traduction de la Marquise du Chastelet) :

"Les espaces qu'une force finie fait parcourir au corps qu'on presse, soit que cette force soit déterminée et immuable, soit qu'elle augmente ou diminue continuellement, sont dans le commencement du mouvement en raison doublée des temps".

Le Corollaire 3 de ce Lemme stipule en outre :

"Corollaire 3. Il en est de même des espaces quelconques que les corps pressés par des forces diverses décrivent. Ces espaces sont encore dans le commencement du mouvement, comme les forces multipliées par les quarrés des temps".

En conséquence, puisque pendant l'intervalle du temps dt la force, supposée "constante et continuellement appliquée", engendre l'accroissement d'espace égal à ddx , nous pouvons décrire alors en suivant strictement Varignon :

$$ddx = ydt^2 \quad \text{ou} \quad y = \frac{ddx}{dt^2}$$

$$\text{soit } y = \frac{ddx}{dt \cdot dt}, \quad \text{ou} \quad dv = \frac{ddx}{dt} \quad \text{d'où } y = \frac{dv}{dt}$$

Cependant, comme nous avons noté précédemment que la variation de vitesse dv , en raison de la forme de son expression, doit apparaître dès le début de l'intervalle de temps dt , il faut donc bien considérer dans ce cas qu'une force agit instantanément au début de cet intervalle de temps dt puis n'agit plus jusqu'au début de l'intervalle de temps suivant. Dans cette perspective, l'expression de "force constante et continuellement appliquée" met à jour certains problèmes sous-jacents afférents à l'engendrement et à la nature du mouvement. Ces difficultés peuvent être mises en évidence de la manière suivante en revenant sur l'expression de l'accroissement de vitesse : dans le cas où la force agirait effectivement continuellement et de façon constante pendant l'intervalle de temps dt , de telle sorte que l'accroissement de vitesse acquis à la fin de cet intervalle de temps soit encore dv , alors l'espace parcouru ne serait plus ddx mais $1/2ddx$. Varignon parvient néanmoins au résultat attendu car, lors du passage, dans l'expression de la force, d'une proportionnalité à une égalité, il néglige de prendre en compte le coefficient $1/2$.

En s'exprimant de façon légèrement différente et en se plaçant dans la perspective de la détermination de l'expression de la force, on peut dire que les

difficultés de la conceptualisation varignonienne résident principalement dans le fait que l'expression de l'accroissement de vitesse dv et celle de la force y impliquent, si l'on peut s'exprimer ainsi, une modélisation ambiguë du mode d'action de la force. En ce sens que celle-ci est censé agir, suivant l'expression que Varignon s'efforce de déterminer, soit au tout premier instant (c'est une conséquence implicite des manipulations strictement mathématiques conduisant à l'expression de dv), soit de façon constante et continue pendant tout l'intervalle de temps dt (c'est l'hypothèse explicite relative au calcul de y).

Finalement, on peut donc reprocher à Varignon, du point de vue de la cohérence de sa conceptualisation, de n'avoir pas approfondi de façon rigoureuse la construction du concept d'accroissement de vitesse et de s'être sans doute une fois de plus laissé entraîner, en ne considérant que la procédure mathématique consistant à "faire dt constante", par l'immense plaisir qu'il prenait à "faire tourner" le nouveau calcul.

Il apparaît donc ici que, tout en parvenant à une expression satisfaisant de y , Varignon laisse cependant malheureusement en suspens un certain nombre de questions tant techniques que conceptuelles.

L'expression générale de la force centrale dans le cas des mouvements rectilignes étant maintenant, si l'on peut dire, acquise, Varignon est en droit d'énoncer ce qu'il appelle les "Règles générales des mouvements en lignes droites".

$$1^{\circ}. v = \frac{dx}{dt} \qquad 2^{\circ}. y = \frac{dv}{dt} \left(\frac{ddx}{dt^2} \right) "$$

Que nous révèlent ces "Règles générales" ? Très précisément que les concepts de vitesse dans chaque instant et de force accélératrice dans chaque instant, qui viennent successivement d'être construits par Varignon, peuvent en fait être déduits l'un de l'autre par un simple calcul mettant en œuvre les algorithmes leibniziens, et qu'en conséquence "d'après ces formules, comme l'écrit Auguste Comte, toutes les questions relatives à cette théorie préliminaire du mouvement varié se réduiront immédiatement à de simples recherches analytiques, qui consisteront ou dans des différentiations, ou, le plus souvent, dans des intégrations" (Cours de Philosophie Positive, septième Leçon).

Après avoir énoncé ses Règles générales, Varignon en fixe l'usage dès les lignes suivantes :

"Usage. Je dis présentement qu'une des six courbes cy-dessus étant donnée à discrétion, on pourra toujours en déduire les cinq autres par le moyen de ces deux Règles, supposé les résolutions et les intégrations nécessaires des

égalités en question".

Puis, à l'issue de l'étude de deux exemples, fort simples, Varignon conclut sur la généralité de sa méthode :

Les mêmes choses se trouveront de la même manière dans toutes autre hypothèse ; il n'y aura de différence que la difficulté du calcul laquelle n'auroit fait qu'embarasser icy. Ainsi ces deux exemples suffisent".

Par la suite, dès l'année 1700, Varignon donnera les Règles générales des mouvements curvilignes.

3) Les Enjeux de la physique mathématique

Dans les premières lignes de cet article nous nous demandions comment la conceptualisation différentielle de la science du mouvement avait pu favoriser la réorganisation et le développement de cette science ? Il nous semble maintenant que nous sommes en mesure de donner des réponses ou du moins des éléments de réponse.

Il apparaît très clairement que la conceptualisation différentielle de la science du mouvement au début du XVIII^e siècle ne doit pas être interprétée comme le résultat d'une simple transposition, en termes différentiels, des concepts et des démarches de la science du mouvement tels qu'ils s'exprimaient précédemment ; mais bien plutôt comme le résultat d'une véritable reconstruction conceptuelle qui conduit à une réorganisation du champ de la science du mouvement autour des concepts de vitesse dans chaque instant et de force accélératrice dans chaque instant.

Cette reconstruction conceptuelle est riche d'enseignements. Car, en parvenant, à la lumière du nouveau calcul leibnizien, à donner au concept de vitesse dans chaque instant ou, en modernisant légèrement, de "vitesse instantanée" une expression explicite et opérante, Varignon montre *a contrario* qu'il n'était pas véritablement possible jusqu'à ce moment de penser efficacement cette vitesse instantanée, et donc qu'il n'était pas possible de la penser efficacement en dehors du calcul différentiel.

En outre, et d'un point de vue plus général, le travail conceptuel varignonien témoigne également que les mathématiques ont avec la physique un rapport de constitution, mieux un rapport constituant, car c'est bien, à examiner de près ce travail dans la dynamique de leur rapport — on pourrait dire de leur couplage — que se trouvent engendrés les nouveaux concepts, en l'occurrence ici, ceux de vitesse dans chaque instant et de force accélératrice dans chaque instant.

Cette reconstruction varignonienne permet alors de comprendre

l'extraordinaire développement de la science du mouvement au XVIII^e siècle ; celui-ci résulte en effet, d'une part de la très grande généralité des deux nouveaux concepts mis en place par Varignon et, d'autre part du fait que les expressions de ces concepts sont susceptibles de se déduire l'une de l'autre par le jeu de simples procédures bien réglées de différentiation et d'intégration. C'est l'algorithmisation de la science du mouvement.

Au regard de ces quelques remarques c'est l'ensemble de l'œuvre varignonienne qui prend un relief nouveau. Elle est en effet trop souvent ou tout simplement oubliée, ou au mieux présentée par les historiens de la mécanique classique en quelques phrases relatives d'ailleurs uniquement à ses contributions à la statique ("polygone de Varignon"). La raison de ce manque d'intérêt pour la plus grande partie de l'œuvre de Varignon est en fait assez simple à comprendre. Les historiens de la mécanique classique ne voyant, pour la plupart, dans les mathématiques, à la façon des positivistes, qu'un instrument ou un outil au service de la science, privilégient dans leurs travaux l'analyse historique des concepts ou des principes de la mécanique et négligent de penser la science du mouvement en tant que physique mathématique, c'est-à-dire qu'ils négligent le plus souvent de reconnaître son plein effet à l'action proprement mathématique de la physique mathématique dans la coordination, la cohérence et la genèse conceptuelle. Or c'est précisément sur ce terrain que se situe l'effort de Varignon. A cet égard, n'est-il pas remarquable de constater que, si ses "formules ou règles générales" résument et rassemblent bien divers résultats, elles sont aussi et surtout des points de départ pour de nouvelles investigations ? Avec Varignon, la physique mathématique qui avait reçu son impulsion de Galilée, Huygens et Newton, prend plus nettement conscience de sa valeur inductive spécifique.

En ce sens, on peut dire que l'œuvre varignonienne, caractérisée par son nouveau style analytique orienté vers l'obtention d'ensembles de loi ou de règles régies par des procédures algorithmiques, style qui culminera avec la Mécanique analytique de Lagrange, après avoir imposé sa marque aux écrits de Euler, Clairaut et d'Alembert, aura finalement ouvert la voie à ce qui sera la physique mathématique des XVIII^e et XIX^e siècles.